数理解析研究所講究録
第1897巻2014年83-90

高次元の超曲面で覆われる多様体

On manifolds swept out by high dimensional hypersurfaces

早稲田大学・基幹理工学研究科 鈴木 拓
Taku Suzuki
School of Fundamental Science and Engineering, Waseda University

概要

本稿は，2013年12月に行われた研究集会「Fano多様体の最近の進展」における講演「On manifolds swept out by high dimensional hypersurfaces」の概説である．完全交叉に関するハーツホーン予想を認めた上で，高い次元の d 次超曲面で覆われる多様体はある収縮射を持ち，(a) 射影空間束になる，もしくは (b) 一般的なファイバーが d 次超曲面になることを示す．

1 序文

本稿では，基礎体は複素数体とし，射影空間 $\mathbb{P}^N$ 内において以下の性質を持つような n 次元非特異射影多様体 X について考える．

(*) ある整数 m，d に対して，m 次元 d 次の非特異超曲面で覆われている，すなわち，一般的な点を通る m 次元 d 次の非特異超曲面が X 内に存在する．

ここで，$\mathbb{P}^N$ 内の射影多様体が m 次元超曲面であるとは，ある $m+1$ 次元線形空間内で余次元1であることを意味する．特に，1次超曲面とは線形空間のことである．

例 1.1 (明らかな例)．性質 (*) を持つ多様体の例として，明らかなものが二つ存在する．一つは線形空間 $X=\mathbb{P}^n$ であり，これは任意の次数 d に対して次元 $n-1$ 以下の非特異超曲面で覆われている．もう一つは d 次の非特異超曲面 $X\subset\mathbb{P}^{n+1}$ であり，これも次元 n 以下の d 次非特異超曲面で覆われている．これらを更に一般化すると，次のいずれかを満たせば X は (*) を満たすことがわかる：

(a) X は線形 $\mathbb{P}^k$-束であり，$m\leq k-1$.

(b) 一般的なファイバーが k 次元 d 次の超曲面である射 $\varphi: X\to Y$ を持ち，$m\leq k$.

例 1.2 (その他の例)．$d=1$ のとき，

- $2m$ 次元の非特異2次超曲面 $Q_{2m}\subset\mathbb{P}^{2m+1}$ は m 次元線形空間で覆われている．

- プリュッカー埋め込みで射影空間に埋め込まれた ($2m$ 次元) グラスマン多様体 $G(2, m+2)$ は m 次元線形空間で覆われている.

$d=2$ のとき,

- (6 次元) グラスマン多様体 $G(2,5) \subset \mathbb{P}^9$ は 4 次元の非特異 2 次超曲面で覆われている.
- 10 次元スピノル多様体 $S_{10} \subset \mathbb{P}^{15}$ は 6 次元の非特異 2 次超曲面で覆われている.

これらの他にも (*) を満たす例は多く存在するが, 例 1.1 以外の例においては, 覆っている超曲面の次元 m が多様体の次元 n と比べてある程度小さいことがわかる. したがって, ある程度次元の大きい超曲面で覆われる多様体は例 1.1 における (a), (b) のいずれかを満たすことが期待される. 事実, 次数 d が小さい場合においては, 次のことが知られている:

定理 1.3 (知られている結果). n 次元非特異射影多様体 $X \subset \mathbb{P}^N$ が (*) を満たすとする.

(1) $d=1$ のとき, $m \geq [\frac{n}{2}]+1$ であれば, X は線形 $\mathbb{P}^k$-束である. (Sato[12])

(2) $d = 2$ のとき, $m \geq [\frac{n}{2}]+2$ であれば, X は (a), (b) のいずれかを満たす. (Beltrametti, Ionescu[1])

(3) $d = 3$ のとき, $m \geq [\frac{n}{2}]+3$ であれば, X は (a), (b) のいずれかを満たす. (Watanebe[13])

ここで, $[\frac{n}{2}]$ は $\frac{n}{2}$ の整数部分を意味する.

これらの結果から, 一般の次数 d に対して次のことが自然に予想できる:

予想 1.4. (*) を満たす n 次元非特異射影多様体 $X \subset \mathbb{P}^N$ において, $m \geq [\frac{n}{2}]+d$ であれば, X は (a), (b) のいずれかを満たす.

高い指数 (index) を持つファノ多様体の分類を適用することで, 予想 1.4 は $d=4$ までについて成立することが得られる (定理 4.4). しかし, $d \geq 5$ では未解決である.

一方, 次元 m に関する仮定を少し強くし, 更に完全交叉に関する有名なハーツホーン予想を仮定することで, 予想 1.4 が一般の次数 d に対して成立することが得られた. ここで, ハーツホーン予想とは次の予想である:

予想 1.5. n 次元非特異射影多様体 $X \subset \mathbb{P}^N$ において, $n > \frac{2}{3}N$ であれば, $X \subset \mathbb{P}^N$ は完全交叉である.

次の主張が今回の主定理である:

主定理. ハーツホーン予想が成り立つと仮定する. n 次元非特異射影多様体 $X \subset \mathbb{P}^N$ が次元 $m \geq \frac{2n-1}{3}+d$ の d 次非特異超曲面で覆われているならば, 次のいずれかを満たす:

(a) X は線形 $\mathbb{P}^k$-束であり, $m \leq k-1$.

(b) 一般的なファイバーが k 次元 d 次の超曲面である射 $\varphi : X \to Y$ を持ち, $m \leq k$.

2 直線の族およびVMRT

この章では，$X \subset \mathbb{P}^N$ を n 次元非特異射影多様体とする．X 上の直線全体から成るヒルベルトスキームを $F^1(X)$ で表す．また，X 上の点 p に対して，p を通る直線全体から成るスキームを $F^1_p(X)$ で表す．$F^1(X)$ の既約成分のことを X 上の直線の族 (family) と呼ぶ．X 上の直線の族 $\mathscr{L}$ に対して，$\mathscr{L}$ に属す直線の和集合を $\mathrm{Locus}(\mathscr{L})$ で表し，$\mathrm{Locus}(\mathscr{L}) = X$ のとき $\mathscr{L}$ は被覆族 (covering family) であるという．

以下 X は直線で覆われていると仮定し，$\mathscr{L}$ を X 上の直線の被覆族の一つとする．また，p を X 内の一般的な点とする．このとき，$\mathscr{L}$ に属す直線で p を通るものから成るスキームを $\mathscr{L}_p$ で表し，これを ($\mathscr{L}$ に関する点 p での)VMRT(varity of minimal rational tangents) と呼ぶ．このスキームは，自然に p での接空間の射影化 $\mathbb{P}_*(T_pX)(:= (T_pX \setminus \{0\})/\mathbb{C}^*)$ の部分多様体とみなせることに注意する．

次の二つの命題は，高い次元の VMRT を持つ多様体の性質を表すものである．

命題 2.1 (Beltrametti, Sommese, Wiśniewski[2] および Wiśniewski[14])**.** 上のセッティングにおいて，$\dim \mathscr{L}_p \geq \frac{n-1}{2}$ と仮定する．このとき，$\mathscr{L}$ に属す直線の数値的類 (numerical class)$[\mathscr{L}]$ は $NE(X)$ 内の端射線 (extremal ray) を生成する．また，φ をその端射線に関する収縮射 (contraction)，F を φ の一般的なファイバーとすれば，F はピカール群 $\mathbb{Z}$ のファノ多様体である．

命題 2.2 (Hwang[7])**.** 上のセッティングにおいて，$\dim \mathscr{L}_p \geq \frac{n-1}{2}$ および $\mathrm{Pic}(X) = \mathbb{Z}$ を仮定する．このとき，VMRT$\mathscr{L}_p$ は $\mathbb{P}_*(T_pX) = \mathbb{P}^{n-1}$ 内で非退化な非特異既約多様体になる．

3 第二基本形式

この章では，$X \subset \mathbb{P}^N$ を非退化な n 次元非特異射影多様体とし，p を X 内の一般的な点とする．接空間 T_pX と交わらない線形空間 $\mathbb{P}^{N-n-1} \subset \mathbb{P}^N$ を一つとり，$\pi_p : X \dashrightarrow \mathbb{P}^{N-n-1}$ を T_pX からの射影とする．$\phi : \mathrm{Bl}_p(X) \to X$ を X の点 p でのブローアップとし，$E := \mathbb{P}_*(T_pX) \subset \mathrm{Bl}_p(X)$ を例外因子とする．また，H を $X \subset \mathbb{P}^N$ の超平面切断とする．このとき，π_p から誘導される有理写像 $\widetilde{\pi}_p : \mathrm{Bl}_p(X) \dashrightarrow \mathbb{P}^{N-n-1}$ の E への制限は $|\phi^*(H) - 2E_{|E}| \subset |-2E_{|E}| = |\mathscr{O}_{\mathbb{P}_*(T_pX)}(2)|$ に含まれるある線形系で与えられる．$\mathbb{P}_*(T_pX)$ 内の 2 次超曲面からなるこの線形系を第二基本形式 (second fundamental form) と呼び，$|II_{p,X}|$ で表す．$\mathbb{P}_*(T_pX)$ 内において $|II_{p,X}|$ の基点集合は，X と点 p で重複度 3 以上で接する直線からなるものであり．したがって特に $F^1_p(X)$ を含んでいることに注意する．([11, Definition 1.5] も参照せよ．)

$S(X) \subset \mathbb{P}^N$ を X の割線多様体 (secant variety)，すなわち X 内の一般的な 2 点を結ぶ直線の和集合の閉包とする．このとき，X の secant defect と呼ばれる値を $\delta(X) := 2n + 1 - \dim S(X)$ で定義する．明らかに $\delta(X) \geq 0$ である．

命題 3.1 (Russo[11, Theorem 2.3(1)])**.** $\delta(X) > 0$ ならば $\dim|II_{p,X}| = N - n - 1$ である．

命題 3.2 (Hwang, Kebekus[6, Theorem 3.14]). X を $\mathrm{Pic}(X)=\mathbb{Z}\langle\mathcal{O}_X(1)\rangle$ なるファノ多様体とし，$i(X)$ を X の指数 (すなわち $-K_X\cong\mathcal{O}_X(i(X))$) とする．ここで，$\mathcal{O}_X(1)$ は $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1)$ の X への制限を意味する．このとき，$i(X)>\frac{2n}{3}$ ならば $\delta(X)>0$ である．

4 主結果の証明

主定理の証明を与える．

Proof. X を主定理の仮定を満たすものとする．仮定 $m\geq\frac{2n-1}{3}+d$ から，特に $m\geq 3d-1>d$ である．このことから，S を m 次元 d 次の非特異超曲面とすると，一般的な点 $p\in S$ に対して $F_p^1(S)\subset\mathbb{P}_*(T_pS)$ は次数 $(d,d-1,d-2,\dots,2)$ の完全交叉になることが知られている．とくに，$F_p^1(S)$ は既約である．したがって，S は直線の被覆族 $\mathscr{L}^S$ を唯一つ持つ ([13]Proposition 2.2 参照)．ところで，X はそのような S らで覆われており，各 $\mathscr{L}^S$ は X 上の直線の族のいずれかには包含されている．一方 X 上の直線の族は高々有限個なので，次を満たす X 上の直線の被覆族 $\mathscr{L}$ を一つ選べる：

> 一般的な点 $p\in X$ に対して，$p\in S_p\subset X$ かつ $\mathscr{L}^{S_p}\subset\mathscr{L}$ なる m 次元 d 次の非特異超曲面 S_p が存在する．

特に $\mathscr{L}_p^{S_p}\subset\mathscr{L}_p$ であるが，$\mathscr{L}_p^{S_p}$ は $\mathbb{P}_*(T_pS)=\mathbb{P}^{m-1}$ 内で次数 $(d,d-1,d-2,\dots,2)$ の完全交叉なので，

$$\dim\mathscr{L}_p\geq\dim\mathscr{L}_p^{S_p}\geq m-d\geq\frac{2n-1}{3}\geq\frac{n-1}{2}.$$

よって命題 2.1 より，$\mathbb{R}_{\geq 0}[\mathscr{L}]$ は端射線であり，それに関する収縮射 $\varphi:X\to Y$ を得る．また，F を φ の一般的なファイバーとすれば，F はピカール群 $\mathbb{Z}$ のファノ多様体である．

以下ファイバー F の次元を k，F の線形包 (linear span)$\langle F\rangle$ の次元を M と置き，p を F 内の一般的な点とする．このとき各超曲面 S_p は，唯一の直線の被覆族 $\mathscr{L}^{S_p}$ に関して有理鎖連結 (rationally chain connected) になることが知られている．すなわち，S_p 内の一般的な 2 点は $\mathscr{L}^{S_p}$ に属す直線の鎖 $\{l_i\}_i$ によって繋ぐことができる．一方 $\mathscr{L}^{S_p}\subset\mathscr{L}$ だったので，直線 l_i らは全て収縮射 φ によって 1 点に収縮される．ゆえに S_p 自身も φ で 1 点に収縮されるので，S_p はファイバー F に包含される．これが一般的な点 $p\in F$ に対して成立するので，ファイバー F も m 次元 d 次の非特異超曲面で覆われる．したがって先ほどと同様に，一般的な点 $p\in F$ に対して $\mathscr{L}^{S_p}\subset\mathscr{L}^F$ であるような F 上の直線の被覆族 $\mathscr{L}^F$ を一つ選べる．このとき，

$$\dim\mathscr{L}_p^F\geq\dim\mathscr{L}_p^{S_p}\geq\frac{n-1}{2}\geq\frac{k-1}{2}.$$

よって命題 2.2 より，$\mathscr{L}_p^F\subset\mathbb{P}_*(T_pF)(=\mathbb{P}^{k-1})$ は非退化な非特異既約多様体である．

以下ファイバー F が線形空間もしくは超曲面になることを示す．その証明においてキーとなる命題が次の事実である：

命題 4.1 (Zak[15, I Proposition 2.16]). $X \subset \mathbb{P}^N$ を非退化な n 次元非特異射影多様体とし，$Z \subset X$ を閉部分多様体で $\dim Z > [\frac{N-1}{2}]$ なるものとする．このとき，$\mathrm{codim}_{\mathbb{P}^N}(X) \leq \mathrm{codim}_{\langle Z\rangle}(Z)$ が成立する．

さて，先ほどの計算から $\dim \mathscr{L}_p^{S_p} > [\frac{(k-1)-1}{2}]$ である．そこで命題 4.1 を $\mathscr{L}_p^{S_p} \subset \mathscr{L}_p^F \subset \mathbb{P}^{k-1}$ に対して適用すると，

$$\mathrm{codim}_{\mathbb{P}^{k-1}}(\mathscr{L}_p^F) \leq \mathrm{codim}_{\mathbb{P}^{m-1}}(\mathscr{L}_p^{S_p}) = d-1.$$

よって $\dim \mathscr{L}_p^F \geq k-d$ を得る．ところで，$k \geq m \geq 3d-1$ より $d \leq \frac{k+1}{3}$ である．ゆえに，

$$\dim \mathscr{L}_p^F \geq \frac{2k-1}{3} > \frac{2(k-1)}{3}.$$

そこでハーツホーン予想より $\mathscr{L}_p^F \subset \mathbb{P}^{k-1}$ が完全交叉であることが従う．

一方，有理曲線の変形理論から，VMRT の次元と多様体の指数に関して $\dim \mathscr{L}_p^F = i(F)-2$ が成り立つことが知られている．よって，

$$i(F) \geq k-d+2 \geq \frac{2k+5}{3} > \frac{2k}{3}.$$

したがって，命題 3.2 より $\delta(F) > 0$ であり，ゆえに命題 3.1 より第二基本形式 $|II_{p,F}| \subset |\mathscr{O}_{\mathbb{P}_*(T_pF)}(2)|$ の次元は $M-k-1$ となる．すなわち，$\mathbb{P}_*(T_pF) = \mathbb{P}^{k-1}$ 内において $|II_{p,F}|$ の基点集合は $M-k$ 個の線形独立な 2 次超曲面の交叉である．ところで第二基本形式の定義から，完全交叉 $\mathscr{L}_p^F$ は $|II_{p,F}|$ の基点集合に包まれている．ゆえに次の補題が適用できる：

補題 4.2. $X \subset \mathbb{P}^N$ を非退化な完全交叉とし，$W \subset X$ を閉部分多様体で t 個の線形独立な 2 次超曲面の交叉からなるものとする．このとき，$\mathrm{codim}_{\mathbb{P}^N}(X) \geq t$ が成立する．

Proof. X を定義する多項式を $P_1,\ldots,P_c (c := \mathrm{codim}_{\mathbb{P}^N}(X))$，$W$ を定義する 2 次多項式を $Q_1,\ldots,Q_t$ とする．ここで $\deg P_1 = \cdots = \deg P_e = 2 < \deg P_{e+1} \leq \cdots \leq \deg P_c$ としてよい．このとき各 Q_i は，$P_1,\ldots,P_c$ で生成されるイデアルに含まれるので，$P_1,\ldots,P_e$ で張られる $\mathbb{C}$-ベクトル空間にも含まれる．今 $Q_1,\ldots Q_t$ は線形独立なので，$t \leq e \leq c$ を得る． □

補題 4.2 より，

$$(k-1) - \frac{2k-1}{3} \geq \mathrm{codim}_{\mathbb{P}_*(T_pF)}(\mathscr{L}_p^F) \geq M-k.$$

これを k について解けば，$k \geq \frac{3M+2}{4}$．これより，

$$\dim S_p = m \geq \frac{2k-1}{3} + d > [\frac{M-1}{2}].$$

したがって命題 4.1 を $S_p \subset F \subset \mathbb{P}^M$ に対して適用でき，

$$\mathrm{codim}_{\mathbb{P}^M}(F) \leq \mathrm{codim}_{\mathbb{P}^{m+1}}(S_p) = 1$$

を得る．これは F が線形空間もしくは超曲面であることを意味する．

ケース 1. F が線形空間の場合

今 $k \geq m \geq \frac{2n-1}{3} + d$ より，$\dim X > 2\dim Y$ が容易にわかる．したがって次の命題により，φ が線形 $\mathbb{P}^k$-束である．すなわち (a) を満たす．

命題 4.3 (Ein[3, Theorem 1.7])**.** $\varphi : X \to Y$ を非特異射影多様体から正規射影多様体への連結なファイバーを持つ射で，$\dim X > 2\dim Y$ なるものとする．$\mathscr{H}$ を X 上の非常に豊富な直線束とし，φ の一般的なファイバー F に対して $(F, \mathscr{H}|_F) \cong (\mathbb{P}^k, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^k}(1))$ であると仮定する．このとき φ は $\mathbb{P}^k$-束である．

ケース 2. F が超曲面の場合

まず $\langle S_p \rangle \not\subset F$ を示す．もし $\langle S_p \rangle \subset F$ であれば，

$$\dim\langle S_p \rangle \geq \frac{2k-1}{3} + d + 1 > [\frac{(k+1)-1}{2}]$$

により再び命題 4.1 が適用でき，$1 = \mathrm{codim}_{\langle F \rangle}(F) \leq \mathrm{codim}_{\langle S_p \rangle}(\langle S_p \rangle) = 0$ が従う．これは矛盾である．

ゆえに交叉 $\langle S_p \rangle \cap F$ も超曲面であり，次元は m 以下，次数は $\deg F$ に等しい．一方この交叉は m 次元 d 次超曲面 S_p を包含している．したがって S_p と一致し，$\deg F$ は d と等しい．すなわち X は (b) を満たす． □

最後に，予想 1.4 において $d = 4$ の場合である次の定理の証明を与える．

定理 4.4. n 次元非特異射影多様体 $X \subset \mathbb{P}^N$ が次元 $m \geq [\frac{n}{2}] + 4$ の 4 次非特異超曲面で覆われているならば，次のいずれかを満たす：

(a) X は線形 $\mathbb{P}^k$-束であり，$m \leq k - 1$.

(b) 一般的なファイバーが k 次元 4 次の超曲面である射 $\varphi : X \to Y$ を持ち，$m \leq k$.

Proof. 主定理の証明において，$i(F) \geq k-d+2$ までは，予想 1.4 の弱い仮定 $m \geq [\frac{n}{2}]+d$ のもとでも同じ議論で証明される．特に $d = 4$ のとき，$i(F) \geq k - 2$ である．そこで，よく知られた高い指数を持つファノ多様体の分類 ([9], [4], [5], [10]) により，$F \subset \mathbb{P}^M$ は次のいずれかに同型である (仮定から $k \geq m \geq 7$ であることに注意せよ)：
$i(F) = k + 1$ のとき，

- 射影空間.

$i(F) = k$ のとき，

- 2 次超曲面.

$i(F) = k - 1$ のとき，

- 3 次超曲面，
- 2 つの 2 次超曲面の完全交叉.

$i(F) = k - 2$ のとき,

- 4 次超曲面,
- 2 次超曲面と 3 次超曲面の完全交叉,
- 3 つの 2 次超曲面の完全交叉,
- 直交 (orthogonal) グラスマン多様体 $OG(5, 10) \subset \mathbb{P}^{15}$ の連結成分の線形切断,
- グラスマン多様体 $G(2, 6) \subset \mathbb{P}^{14}$ の線形切断.

いずれの場合においても $\mathrm{codim}_{\mathbb{P}^M}(F) \leq 6$ である. ゆえに,

$$m \geq [\frac{k}{2}] + 4 > [\frac{M-1}{2}].$$

したがって主定理の証明と同様に, 命題 4.1 を $S_p \subset F \subset \mathbb{P}^M$ に対して適用することで, F は線形空間もしくは超曲面となる. それぞれの場合において (a) および (b) を満たすことも同様に確かめることができる.

□

参考文献

[1] M. C. Beltrametti, P. Ionescu, On manifolds swept out by high-dimensional quadrics, Math. Z. 260(1) (2008) 229-234.

[2] M. C. Beltrametti, A. J. Sommese, J. A. Wiśniewski, Results on varieties with many lines and their applications to adjunction theory, In: Complex Algebraic Varieties (Bayreuth, 1990). Lecture Notes in Math., vol. 1507, pp16-38. Springer, Berlin (1992)

[3] L. Ein, Varieties with small dual variety. II, Duke Math. J. 52 (1985) 895-907.

[4] T. Fujita, On the structure of polarized manifolds with total deficiency one, I, J. Math. Soc. Japan 32 (1980) 709-725.

[5] T. Fujita, On the structure of polarized manifolds with total deficiency one, II, J. Math. Soc. Japan 33 (1981) 415-434.

[6] J. M. Hwang, S. Kebekus, Geometry of chains of minimal rational curves, J. Reine Angew. Math. 584 (2005) 173-194.

[7] J. M. Hwang, Geometry of minimal rational curves on Fano manifolds, in School on Vanishing Theorems and Effective Results in Algebraic Geometry(Trieste, 2000), ICTP Lect. Notes, vol. 6, pp335-393. Abdus Salam Int. Cent. Theoret. Phys. (2001).

[8] P. Ionescu, F. Russo, Manifolds covered by lines, defective manifolds and a restricted Hartshorne Conjecture, arXiv:0909.2763.

[9] S. Kobayashi, T. Ochiai, Characterizations of complex projective spaces and hyperquadrics, J. Math. Kyoto Univ. 13 (1973) 31-47.

[10] S. Mukai, Biregular classification of Fano 3-folds and Fano manifolds of coindex 3, Proc. Natl. Acad. Sci. USA 86 (1989) 3000-3002.

[11] F. Russo, Varieties with quadratic entry locus. I, Math. Ann. 344 (2009) 597-617.

[12] E. Sato, Projective manifolds swept out by large-dimensional linear spaces, Tohoku Math. J. 49(2) (1997) 299-321.

[13] K. Watanabe, On projective manifolds swept out by cubic varieties, Int. J. Math. 23, 1250058 (2012).

[14] J. A. Wiśniewski, On a conjecture of Mukai, Manuscripta Math. 68(2) (1990) 135-141.

[15] F. L. Zak, Tangents and Secants of Algebraic Varieties, Translations of Mathematical Monographs, Vol. 127 (American Mathematical Society, Providence, RI, 1993).

E-mail: s.taku.1231@moegi.waseda.jp